Асимптотические свойства марковских функций, представляемых укрупненными цепями Маркова

Эминов Б.Ф., Захаров В.М.

Введение

Проблематика укрупнения случайных процессов

Укрупнение случайного процесса:

- замена стохастического процесса с большим числом состояний

- на процесс с меньшим числом укрупненных состояний.

<u>Что не решено</u>:

- закон и свойства укрупненного процесса;

- вероятностные предельные характеристики процесса;

- оценки сложности задачи укрупнения.

Функции цепей Маркова (ФЦМ)
востребованы в различных приложениях
как укрупненные стохастические процессы
с конечным числом состояний.

Построение рассматриваемых функций ЦМ:

- состояния цепи Маркова (ЦМ) разбиваются на непересекающиеся классы,
- исследуется поведение ЦМ при условии, что состояния одного класса не различаются.

Исходное положение:

Дано: исходная ЦМ.

Выполняется укрупнение ЦМ.

=> получена функция ЦМ

? проверка: функция ЦМ - простая ЦМ?

Необходимо выполнение **марковского свойства**:

независимость "будущего" от "прошлого" при заданном "настоящем"

[Роман49] про **укрупнение ЦМ**:

- результат укрупнения - характеристическая функция конечных ЦМ,
- "ненастоящие ЦМ" – это функции без марковского свойства.

Представление ФЦМ в виде укрупненных ЦМ позволяет:

- изучать укрупненный процесс методами ЦМ.

Фундаментальная **работа** [**Кемени60**]:

- условия укрупнения ЦМ;
- аналитическое построение укрупненной ЦМ;
- наследование эргодичности укрупненной ЦМ.

Решения задачи укрупнения ЦМ:

- [Hillston95] метод без построения матрицы новой ЦМ;
- [Geiger14] метод с сохранением энтропии у новой ЦМ;
- [ЗахЭми13] алгоритм
    - проверки исходной ЦМ на укрупняемость
    - и построения укрупненных ЦМ.

Получение и исследование предел. вектора укрупненной ЦМ:

- [Gamb11] алгоритмы укрупнения предел. вектора простой ЦМ с учетом:
  - структуры матрицы
  - числа нулевых элементов;
- [Katehakis12] алгоритм получения предел.вектора укрупненной ЦМ через предельные вероятности реализации исходной ЦМ;

- [Gamb11] методы вычисления с min сложности вычисления характеристик:
    - предельного вектора,
    - матрицы времен попадания в возвратные состояния,
    - матрицы времени блуждания до поглощения;
- [Bolch06] методы вычисления предельного вектора для больших ЦМ:
    - без решения системы линейных уравнений
    - приведением матрицы исходной ЦМ к блочному виду.

Прикладные аспекты использования укрупнения ЦМ:

- [Пономаренко06] укрупнение состояний систем обслуживания с пространственно-временными приоритетами;
- [Рожков10] исследование марковских последовательностей;
- [ЭмиЗах14] минимизации марковских автоматов;
- [Деундяк13] представление укрупненных скрытых полумарковских моделей в полиномиальном виде над полем Галуа;
- [Погорелов14] для криптоанализа алгоритмов блочного шифрования.

Решение задачи построения укрупненной ЦМ представлено в [Кем60, ЗахЭми13].

Рассматривается класс регулярных ЦМ:

- $\exists$ единственное эргодическое множество,
- $\exists$ предельный вектор $\overline{\pi}_{\text{пр}}$,
- $\exists$ предельная матрица $P_{\text{пр}}$.

Цель работы:

- определение асимптотических характеристик регулярных
  - укрупняемых
  - и укрупненных цепей Маркова,
- и представление метода вычисления асимптотической характеристики ФЦМ
  - из класса укрупненных цепей Маркова,
  - уменьшающего вычислительную сложность.

Содержание

1. Связь укрупняемых и укрупненных цепей Маркова
2. Свойства укрупняемой цепи Маркова
3. Свойства укрупненной цепи Маркова
4. Метод вычисления конечных степеней стохастических матриц (Теорема 3)
5. Метод вычисления предельного вектора матрицы $\hat{P}$ (Теорема 4)

1. Связь укрупняемых и укрупненных цепей Маркова

Регулярная конечная ЦМ [Кем60] вида

$$(S, P, \overline{\pi_0}), \qquad (1)$$

где $S = \{s_i\}$ – конечное множество состояний ЦМ,
$|S| = n$,
$P = (p_{ij}),\ i,\ j = \overline{0, n-1}$ - регулярная СМ ЦМ размера $n \times n$,
p_{ij} - переходные вероятности ЦМ,
$\overline{\pi_0}$ - вектор начального распределения вероятностей состояний ЦМ.

Выполним разбиение
исходного множества состояний S ЦМ (1)
на t непересекающихся подмножеств
вида $A = \{A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}\}$,
где при $j \neq d$ и $\forall j, \forall d = \overline{0, t-1}$

$$\bigcup_{j=0}^{t-1} A_j = S, \; A_j \cap A_d = 0. \tag{2}$$

Пусть каждое из подмножеств A_j , $j=\overline{0,t-1}$

- новое состояние укрупненной ЦМ,

а стохастический закон укрупненной ЦМ

- задается стохастической матрицей $\hat{P}=(\hat{p}_{dj})$ размера $t\times t$, $d, j=\overline{0,t-1}$.

Пусть

$$p_{kA_j} = \sum_{s_i\in A_j} p_{ki}\,,\; i,k=\overline{0,n-1},\;\; j=\overline{0,t-1} \qquad (3)$$

- вероятность попадания из s_k в множество A_j.

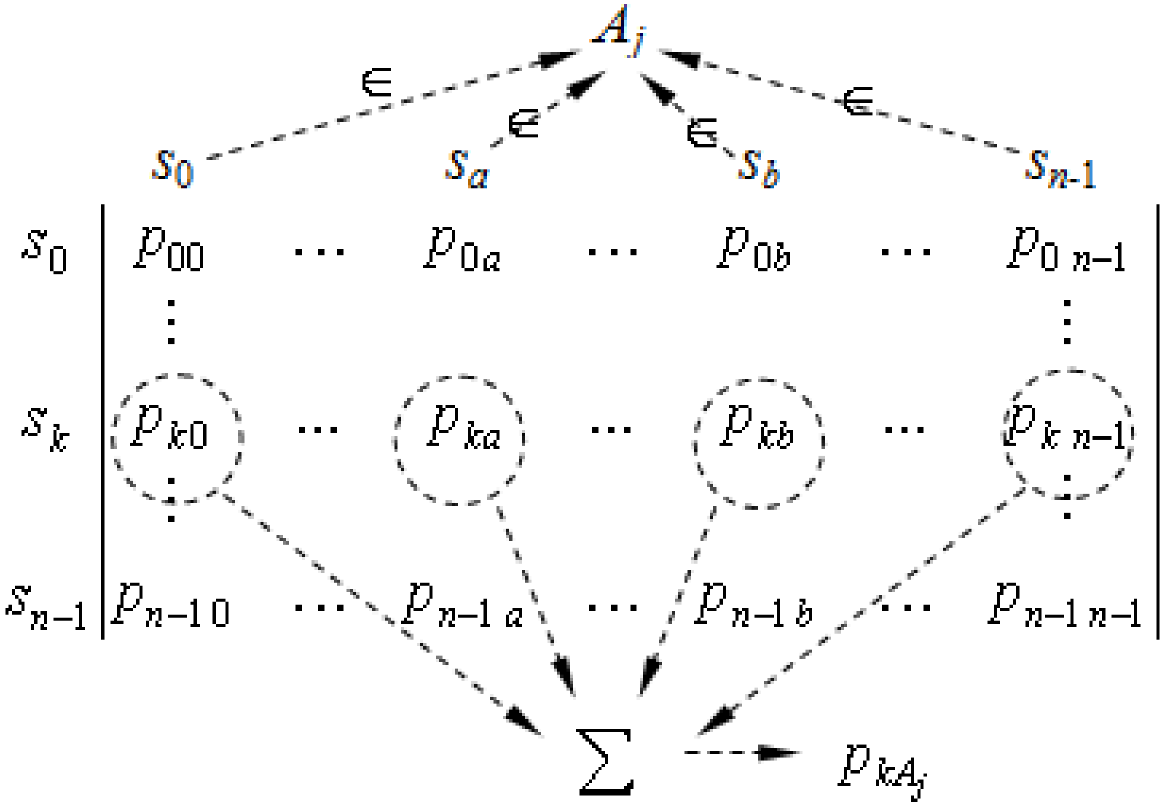

Схема получения величины p_{kA_j}

Теорема 1 [Кем60]. Для того чтобы состояния ЦМ (1) можно было укрупнить посредством разбиения на классы $A = \{A_0, A_1, \ldots, A_{t\text{-}1}\}$,

необходимо и достаточно, чтобы

для любых двух классов A_d и A_j и для $\forall s_k \in A_d$, $k = \overline{0, n-1}$, $d, j = \overline{0, t-1}$,

вероятности p_{kA_j} имели одно и то же значение.

Вероятности $\{\hat{p}_{dj}\}$ переходов между классами образуют СМ $\hat{P}$ укрупненной ЦМ.

Определение 1. Цепь Маркова
с регулярной стохастической матрицей P,
удовлетворяющая условию теоремы 1,
будем называть ***укрупняемой***.

Определение 2. Цепь Маркова
со СМ $\hat{P}$, полученную
укрупнением цепи Маркова (1) по разбиению (2),
будем называть ***укрупненной***.

Пусть матрица $V = (v_{ij}),\ i = \overline{0, n-1},\ j = \overline{0, t-1}$ – булева матрица размера $n \times t$,

- если $v_{ij} = 1$, то s_i исходной ЦМ входит в укрупненное состояние A_j:

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, & s_i \in A_j \\ 0, & s_i \notin A_j \end{cases}.$$

Пусть матрица $U = (u_{ji}),\ i = \overline{0, n-1},\ \ j = \overline{0, t-1}$

- размера $t \times n$,

- стохастическая ($\sum_{i=0}^{n-1} u_{ji} = 1$),

- j-ая строка отражает информацию о классе A_j :

  - если $u_{ji} > 0$, то $s_i \in A_j$;

  - $u_{ji} \in [0; 1]$

  - $u_{ji} = \begin{cases} 1 \Big/ \sum_{i=0}^{n-1} v_{ij}, & s_i \in A_j \\ 0, & s_i \notin A_j \end{cases}$,

где $\sum_{i=0}^{n-1} v_{ij}$ - число всех состояний s_i, где $s_i \in A_j$.

Следствие 1 (из теоремы 1) [Кем60]. Пусть:
1) задана ЦМ (1),
состояния которой можно укрупнить по заданному разбиению (2);
2) определены матрицы U и V
по матрице P
и заданному разбиению (2).
Тогда $\hat{P}$ укрупненной ЦМ задается формулой

$$\hat{P} = UPV\ . \tag{4}$$

Замечание 1. Для произвольно заданной ЦМ вида (1) определить является ли она укрупняемой по заданному разбиению вида (2) можно по алгоритму из [ЗахЭми13].

Теорема 2 [Кем60]. Если матрица

1) P укрупняема при заданном разбиении (2) и

2) матрицы U и V определены как выше, то

$$VUPV = PV. \tag{5}$$

Условие (5) аналитически позволяет проверить **факт укрупняемости ЦМ**.

Следствие 2 (из теоремы 2).
При выполнении условий теоремы 2 справедливо равенство [Кем60]

$$\hat{P}^k = UP^k V, \tag{6}$$

где k – натуральное число,
$2 \leq k \leq \infty$.

2. Свойства укрупняемой цепи Маркова

Вопрос 1. Укрупняема ли ЦМ, заданная предельной $P_{пр}$?

Утверждение 1. Пусть задана предельная матрица $P_{пр}$ регулярной ЦМ.

Тогда ЦМ, заданная стохастической матрицей $P_{пр}$,

при любом разбиении (2)

является укрупняемой.

Вопрос 2. Наследование регулярности при укрупнении

Утверждение 2. Если
1) исходная регулярная ЦМ укрупняема по разбиению (2)
2) матрицы U и V определены как выше,
то результатом ее укрупнения будет регулярная ЦМ.

=> у ЦМ,
полученной укрупнением регулярной ЦМ,
$\exists\ \overline{\hat{\pi}_{np}} = (\hat{\pi}_0^{np}, \hat{\pi}_1^{np}, ..., \hat{\pi}_{t\text{-}1}^{np})$ - предельный вектор
$\exists\ \hat{P}_{np}$ - предельная матрица.

Вопрос 3. Укрупняема ли ЦМ, заданная P^k ?

Утверждение 3. Пусть:

1) ЦМ (1)

   задана матрицей P,

   укрупняема по заданному разбиению (2);

2) Получена P^k

   возведением матрицы P в степень k,

   $2 \le k \le \infty$.

Тогда ЦМ, заданная матрицей P^k,

   также является укрупняемой по разбиению (2).

3. Свойства укрупненной цепи Маркова

Вопрос 4. Вычисление степеней матриц укрупненной ЦМ

Постановка вопроса 4

$$
\begin{tikzcd}
 & P^k \arrow[r, "\text{укрупнение ЦМ}"] & \hat{P}^k_{(y)} \arrow[d, equal] \\
P \arrow[ur, "\text{возведение в степень}"] \arrow[dr, "\text{укрупнение ЦМ}"'] & & \\
 & \hat{P} \arrow[r, "\text{возведение в степень}"'] & (\hat{P})^k
\end{tikzcd}
$$

Теорема 3. Пусть:

1) задана ЦМ (1),

укрупняемая по заданному разбиению (2);

2) по матрице P вычислены:

ее k-ая степень - матрица P^k , $2 \le k \le \infty$,

и стохастическая матрица $\hat{P}$ по формуле $\hat{P}^k = UP^kV$ (6);

3) построена укрупненная ЦМ

из исходной ЦМ, заданной матрицей P^k,

и определяемая стохастической матрицей $\hat{P}^k_{(y)}$;

4) вычислена матрица $(\hat{P})^k$

как k-ая степень $\hat{P}$.

Тогда $\hat{P}^k_{(y)} = (\hat{P})^k$.

Следует **п.4. Метод вычисления степеней стохастических матриц**

матрицу $\hat{P}^k$ можно вычислить

не только по формуле $\hat{P}^k = UP^k V$ (6)

с предварительным вычислением степени P^k,

но и по **методу**:

1) вычисляется матрица $\hat{P}$

по матрице P

алгоритмом [ЗахЭми13];

2) по матрице $\hat{P}$ вычисляется степень $\hat{P}^k$.

Оценки сложности	Общая оценка	При $n = 9$, $t = 4$ и $k > 2$
1) вычисления $\hat{P}^{k}_{(y)}$	$O((k\text{-}1)n^3)$	$729k - 729$
2) вычисления $\hat{P}^{k}$ по формуле (6)	$O((k\text{-}1)t^3 + 8n^2)$	$64k + 584$

Т.е. при $n > t$ и $k > 2$ вычислительная сложность по формуле (6) меньше.

5. Метод вычисления предельного вектора матрицы $\hat{P}$

Вопрос 5. Вычисление предельного вектора укрупненной ЦМ и снижение его вычислительной сложности

Обозначим:

$\overline{\pi_{np}} = (\pi_0^{np}, \pi_1^{np}, ..., \pi_{n\text{-}1}^{np})$ - стох. предельный вектор СМ P;

$\overline{\hat{\pi}_{np}} = (\hat{\pi}_0^{np}, \hat{\pi}_1^{np}, ..., \hat{\pi}_{t\text{-}1}^{np})$ - стох. предельный вектор СМ $\hat{P}$;

$\overline{\pi_{np}^{(y)}} = (\pi_0^{np\,(y)}, \pi_1^{np\,(y)}, ..., \pi_{t-1}^{np\,(y)})$ - укрупн. предельный вектор, полученный на основе разбиения (2), примененного к вектору $\overline{\pi_{np}}$.

Постановка вопроса вычисления предельного вектора

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{\pi_{np}} \arrow[r, "\text{наложение}", "\text{разбиения (2)}"'] & \overline{\pi_{np}^{(y)}} \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
P \arrow[ur, "\text{решение системы уравнений (13)}"] \arrow[dr, "\text{укрупнение ЦМ}"'] & & \\
 & \hat{P} \arrow[r, "\text{решение системы}", "\text{уравнений (13)}"'] & \overline{\hat{\pi}_{np}}
\end{tikzcd}$$

Замечание 2. Стохастический вектор $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$ можно вычислить по формуле

$$\overline{\pi_{np}^{(y)}} = \overline{\pi_{np}} \cdot V . \tag{10}$$

Теорема 4 (**основная**). Если:

1) матрица P_s

при заданном разбиении (2)

удовлетворяет условию укрупнения (теорема 1);

2) укрупненная матрица $\hat{P}$ построена

по матрице P_s

и разбиению (2),

то

$$\overline{\hat{\pi}_{np}} = \overline{\pi_{np}^{(y)}} = \overline{\pi_{np}} \cdot V . \tag{12}$$

=> Метод вычисления вектора $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$

Метод вычисления вектора $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$

Дано:

- исходная регулярная ЦМ (1),
  - укрупняемая по заданному разбиению (2);
- стохастическая матрица P для ЦМ (1).

Шаг 1. Вычисляем матрицу $\hat{P}$ укрупненной ЦМ по матрице P и алгоритмом [ЗахЭми13].

Шаг 2. Вычисляем предельный вектор $\overline{\hat{\pi}_{np}}$ удовлетворяющий равенству (12) на основе системы линейных уравнений вида (13).

Оценка сложности	Общая оценка	При $n = 9$, $t = 4$
1) вычисления $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$	$O(n^3)$	729
2) вычисления $\overline{\hat{\pi}_{np}}$	$O(8n^2 + t^3)$	712

Сложность вычисления $\overline{\hat{\pi}_{np}}$ меньше, чем меньше t.

На рис.:

- средняя кривая – изменение сложности вычисления $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$,

- верхняя и нижняя кривые - изменение сложности вычисления $\overline{\hat{\pi}_{np}}$ при $t_{min} = 2$ и $t_{max} = n–1$.

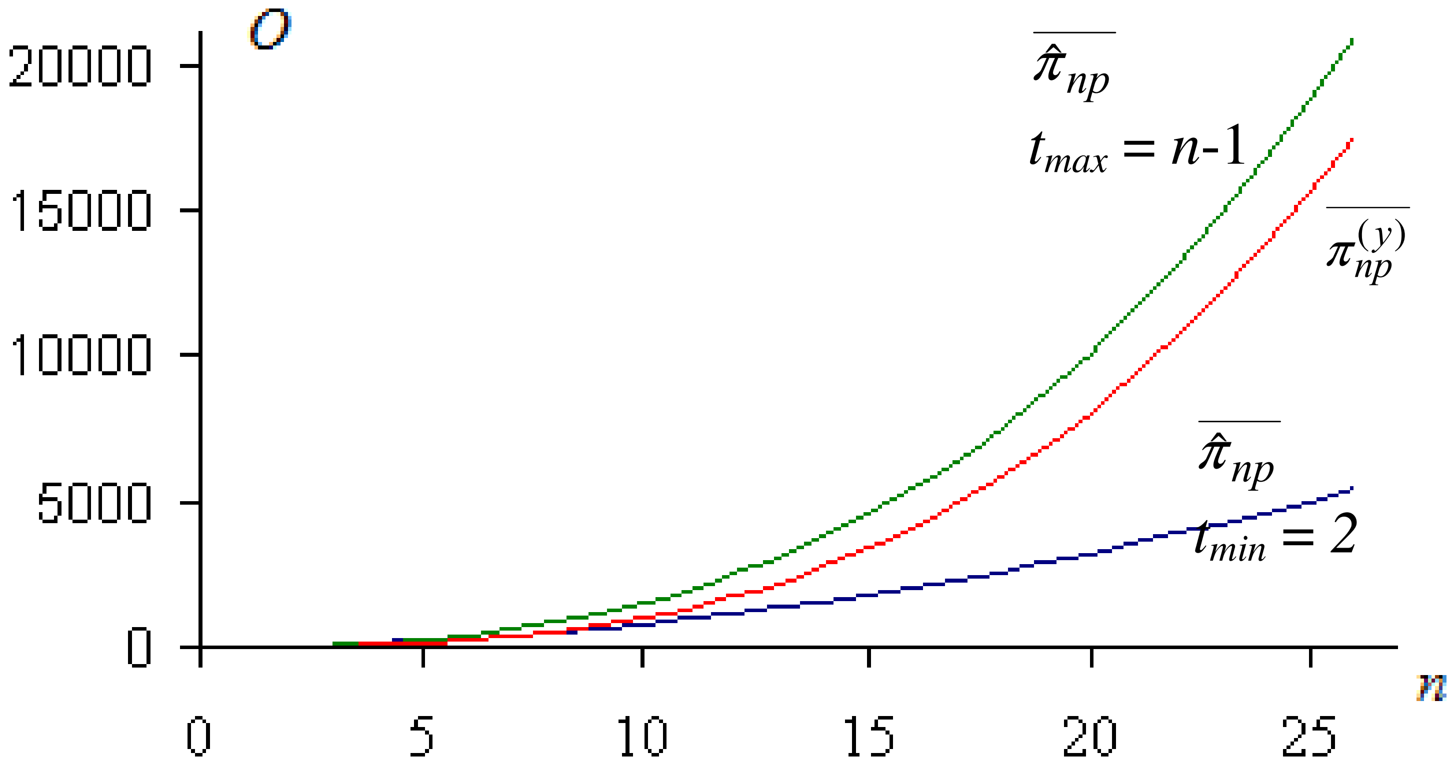

Рис - Графики сложности вычисления $\overline{\hat{\pi}_{np}}$ и $\overline{\pi_{np}^{(y)}}$

Вопрос 6. Вычисление векторов укруп. ЦМ через *k* шагов

Обозначим:

- $\overline{\pi_k}$ – вектор распределения вероятностей *n* состояний ЦМ через конечные *k* шагов;
- $\overline{\pi_0^{(y)}}$ - укрупненный вектор из *t* элементов, полученный на основе разбиения (2) над $\overline{\pi_0}$;
- $\overline{\pi_k^{(y)}}$ - укрупненный вектор из *t* элементов, полученный на основе разбиения (2) над $\overline{\pi_k}$;
- $\overline{\hat{\pi}_k^{(y)}}$ - вектор распределения вероятностей состояний укруп. ЦМ, определяемой СМ $\hat{P}$ через конечное число *k* шагов.

Постановка вопроса 6

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{\pi_k} \arrow[r, "\text{наложение}", "\text{разбиения (2)}"'] & \overline{\pi_k^{(y)}} \arrow[dd, equal] \\
\overline{\pi_0}\,,\, P \arrow[ur, "\text{решение}", "\overline{\pi_k} = \overline{\pi_0}\, P^k"'] \arrow[dr, "\text{укрупнение ЦМ}"'] & & \\
 & \overline{\pi_0^{(y)}}\,,\ \hat{P} \arrow[r, "\text{решение}", "\overline{\hat{\pi}_k^{(y)}} = \overline{\pi_0^{(y)}} \cdot \hat{P}^k"'] & \overline{\hat{\pi}_k^{(y)}}
\end{tikzcd}
$$

Для ЦМ (1) вектор $\overline{\pi_k}$ определим по формуле [Ширя80]

$$\overline{\pi_k} = \overline{\pi_0}\, P^k. \tag{14}$$

Для укрупненной ЦМ

заданной СМ $\hat{P}$

и вектором $\overline{\pi_0^{(y)}}$,

вектор $\overline{\hat{\pi}_k^{(y)}}$ определим

$$\overline{\hat{\pi}_k^{(y)}} = \overline{\pi_0^{(y)}} \cdot \hat{P}^k. \tag{15}$$

Следствие 3 (из теоремы 4). Пусть:

1) матрица P исходной регулярной ЦМ (1) укрупняема при заданном разбиении (2);

2) заданы:

матрица $\hat{P}$ укрупненной ЦМ, полученная по матрице P,

и вектор $\overline{\pi_0^{(y)}}$ начального распределения вероятностей состояний укрупненной ЦМ;

3) вычислена степень $\hat{P}^k$ по матрице $\hat{P}$.

Тогда $$\overline{\hat{\pi}_k^{(y)}} = \overline{\pi_k^{(y)}} \text{ или } \overline{\pi_k^{(y)}} = \overline{\pi_0^{(y)}} \cdot \hat{P}^k. \tag{16}$$

(16) - альтернативная процедура вычисления вектора $\overline{\hat{\pi}_k^{(y)}}$

Заключение

Определены связи между характеристиками
укрупняемых
и укрупненных ЦМ. (10), (12), (15), (16)

Предложен метод вычисления и оценена сложность вычисления степеней матриц $\hat{P}$ и предельных характеристик (теоремы 3 и 4):

- функций укрупняемых ЦМ
- и укрупненных ЦМ;

Показаны соотношения между n и t, при которых сложность снижается.

Заключение (продолжение)

Показано: предельное распределение функции регулярной укрупняемой ЦМ

совпадает с предельным распределением укрупненной ЦМ (теорема 4).