



毕业论文答辩

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

T^n 格点上逾渗的几何结构

朱沛俊

导师：邓友金

2016 年 6 月 5 日



毕业论文答辩

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

1 逾渗模型

2 键分类

3 键分类后的几何性质

- 比例
- 最大集团

4 缠绕的拓扑结构

5 展望与致谢



大纲

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

1 逾渗模型

2 键分类

3 键分类后的几何性质

- 比例
- 最大集团

4 缠绕的拓扑结构

5 展望与致谢



T^n 晶格上的键逾渗

无序多孔介质，键逾渗，连通集团，广义的逾渗，周期性边界条件

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

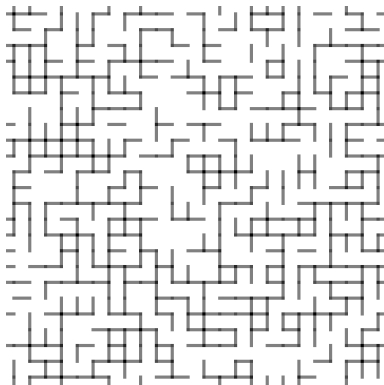


图: 二维键逾渗图, 置键概率 0.48



T^n 晶格上的键逾渗

周期性边界条件, 缠绕

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

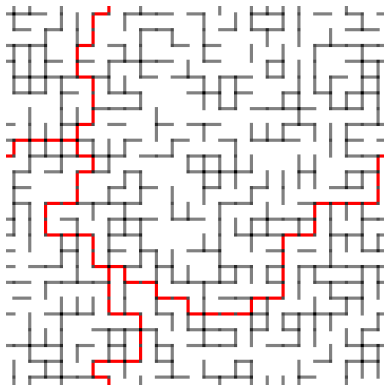


图: 已经发生了缠绕的田型基团



逾渗阈值

当宽度趋于无穷的时候，缠绕概率的突变点。无穷大晶格中大尺度集团的形成。

精确解? Bethe Lattice, Kagome lattice

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

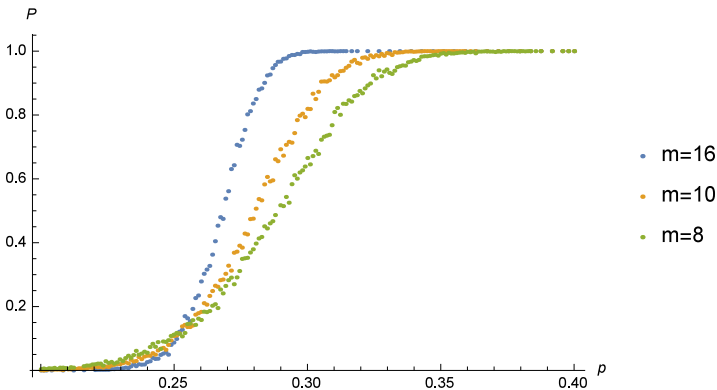


图: 三维缠绕概率与置键概率的关系图



大纲

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

1 逾渗模型

2 键分类

3 键分类后的几何性质

- 比例
- 最大集团

4 缠绕的拓扑结构

5 展望与致谢



键分类

通过对键分类来研究几何结构，枝叶

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

键 { 桥 { 枝叶
 { 枢纽
 非桥

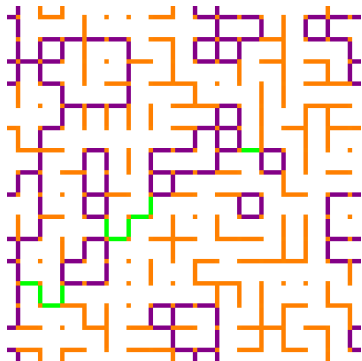


图: 绿—枢纽, 深紫—非桥, 橙—枝叶



键分类

非桥与枢纽

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

键 { 桥 { 枝叶
 { 枢纽
 非桥

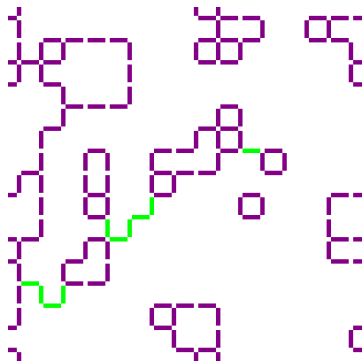


图: 绿—枢纽, 深紫—非桥



键分类的算法

已经实现程序并且得到了相关数据

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

剪枝——理论上易严格证明 $O(N)$

递归剪除度为 1 的树叶

BFS 标记非桥

- 成环时，通过回溯对环进行标记
- 回溯中，进行路径压缩，通过捷径回溯



回溯过程的复杂度

平均每次回溯走的捷径次数小于 2

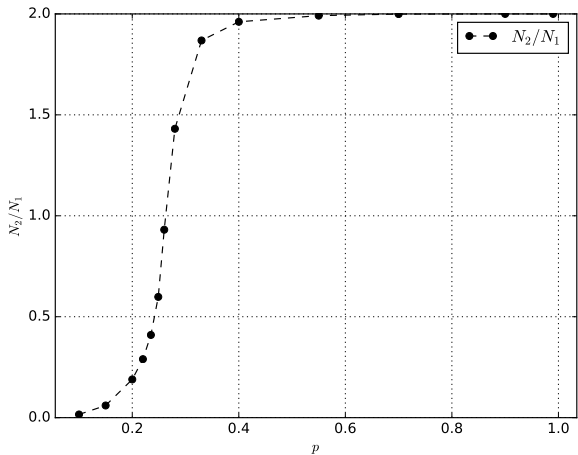


图: 走捷径数比回溯次数 N_1/N_2 与置键概率 p 的关系

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



大纲

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

1 逾渗模型

2 键分类

3 键分类后的几何性质

- 比例
- 最大集团

4 缠绕的拓扑结构

5 展望与致谢



邓友金老师二维的结果

表: 二维 $\rho = \rho_\infty + kL^D$, 对各种成分比例进行拟合

类型	ρ_∞	D	k
枢纽	0.03594978(5)	-1.2502(3)	-0.2777(2)
非桥	0.2500001(1)	-1.2508(6)	+0.2783(5)
枝叶	0.21405019(3)		

最大丛分形维度

原始 $91/48 = 1.8958\bar{3}$

去枝 $\approx 91/48$

去桥 1.64336

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



三维 $L \rightarrow \infty$ 时, 各种成分占据的比例

$L = 16, 23, 32, 45, 64, 90, 128, 181, 256$

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

表: 三维 $\rho = \rho_\infty + kL^D$, 对比例进行拟合

类型	ρ_∞	D	k
枢纽	0.0567811(1)	-1.8589	-0.9825
非桥	0.1472237(2)	-1.8603	+0.9873
枝叶	0.7959952(2)		



逾渗阈值处，不同组分的比例

枢纽比例 $\rho \approx 0.0567811(1) - 0.9825L^{-1.8589}$

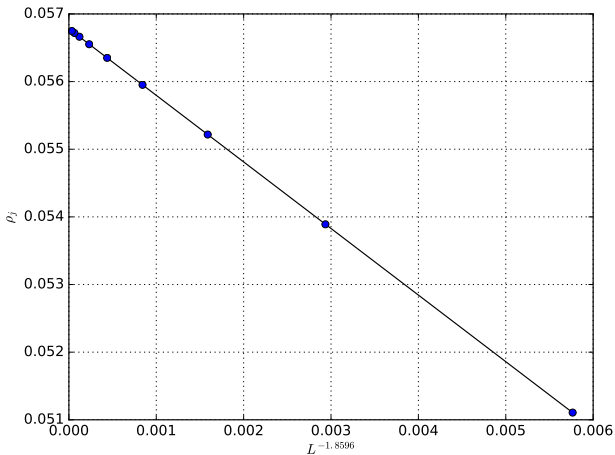


图: 枢纽的比例随 $L^{-1.8596}$ 的变化趋近 0.0567811(1)

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



逾渗阈值处，不同组分的比例

非桥比例 $\rho \approx 0.1472237(2) + 0.9873L^{-1.8603}$

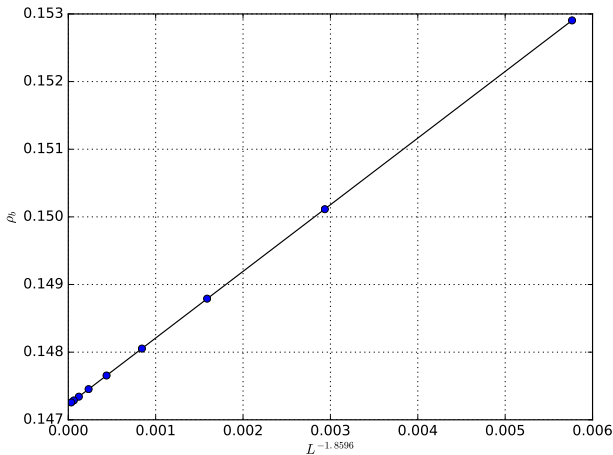


图: 非桥的比例随 $L^{-1.8596}$ 的变化趋近 0.1472237(2)

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



逾渗阈值处，不同组分的比例

枝叶比例 $\rho \approx 0.7959952(2)$

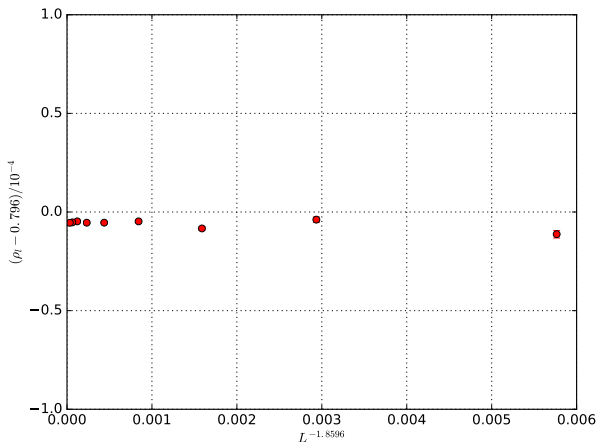


图: 枝叶的比例在 0.7959952(2) 附近 (放大了一百倍依然保持稳定)

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



最大集团的分形维度

$$D \approx 2.52237$$

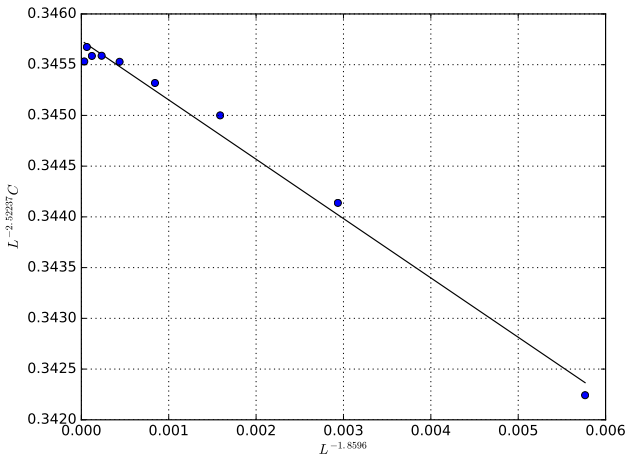


图: 最大集团的分形维度

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



最大集团的分形维度

去枝后, 最大丛大小约为原最大丛的 35%, 保持 $D \approx 2.52237$

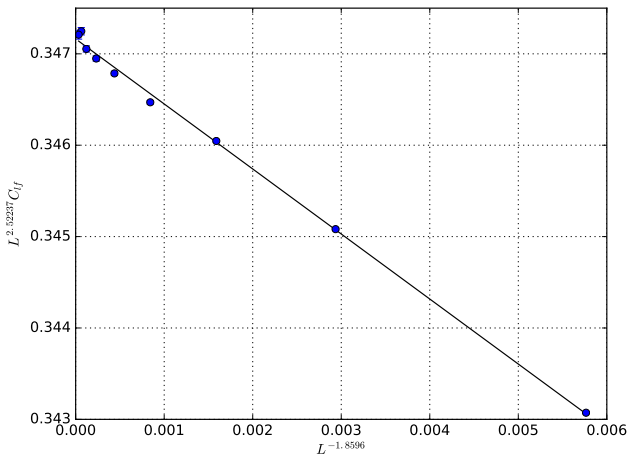


图: 去除枝叶后的分形维度

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



最大集团的分形维度

去桥后，分形维度下降了 0.65，分裂效应

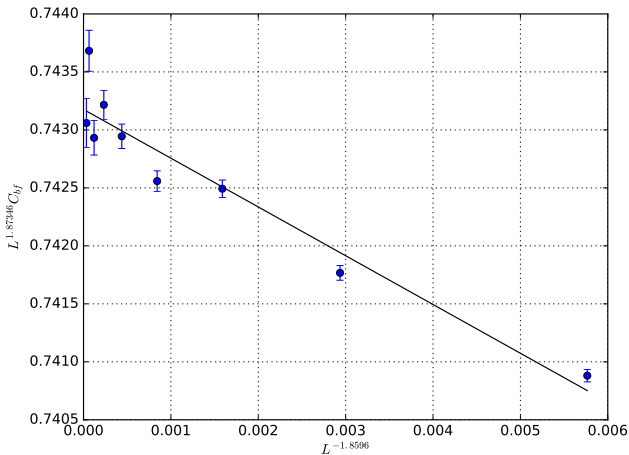


图: 去除桥后的分形维度

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



最大集团的分形维度

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

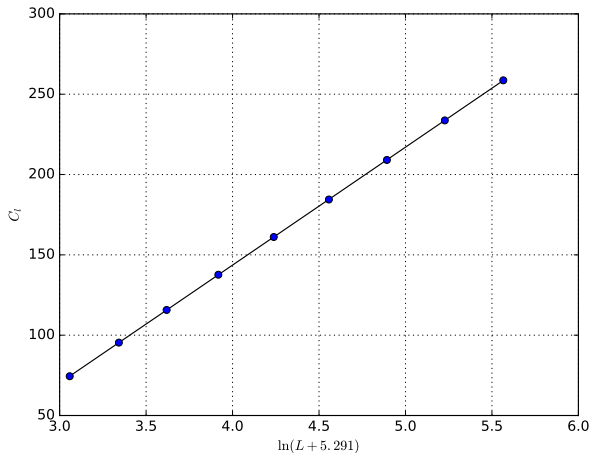


图: 最大枝叶随 $\ln(L + L_0)$ 的变化关系



大纲

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

1 逾渗模型

2 键分类

3 键分类后的几何性质

- 比例
- 最大集团

4 缠绕的拓扑结构

5 展望与致谢



不自交环的分类

不自交的回路对应的同伦等价类。

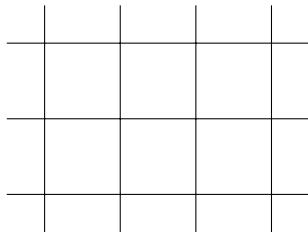


图: 利用延拓后的格子可以看出, 二维不存在 $(2,2)$ 型缠绕

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



不自交环的分类

不自交的回路对应的同伦等价类。

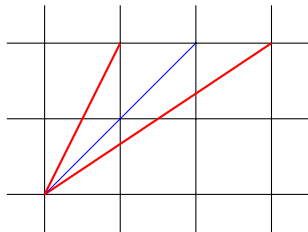


图: 利用延拓后的格子可以看出, 二维不存在 $(2,2)$ 型缠绕

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



不自交环的分类

不自交的回路对应的同伦等价类。

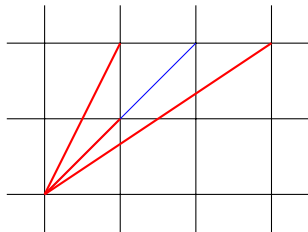


图: 利用延拓后的格子可以看出, 二维不存在 $(2,2)$ 型缠绕

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



T^n 下不自交环的分类

$n=1$ 只有缠绕一圈的环

$n=2$ 当且仅当 $p:q$ 最简时, 有缠绕 (p, q) 圈的环

$n>2$ 存在任意的 (p_1, p_2, \dots, p_n) 型环

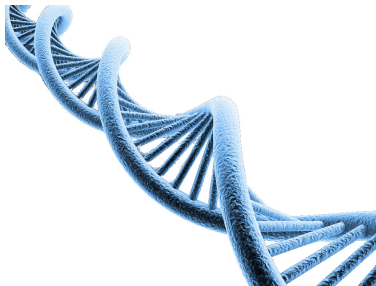


图: 高维时可以螺旋线形式避免与平移后的自己相交

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



T^n 下集团的缠绕拓扑结构

一个集团可能由多个环组成

二维

二维情况下集团的结构一定是“田”型或 (p, q) 型



逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

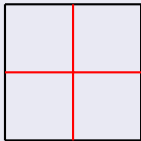


T^n 下集团的缠绕拓扑结构

一个集团可能由多个环组成

二维

二维情况下集团的结构一定是“田”型或 (p, q) 型



逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

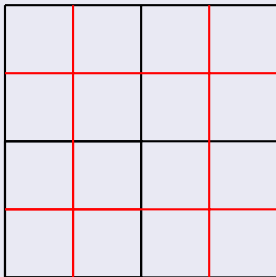


T^n 下集团的缠绕拓扑结构

一个集团可能由多个环组成

二维

二维情况下集团的结构一定是“田”型或 (p, q) 型



逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

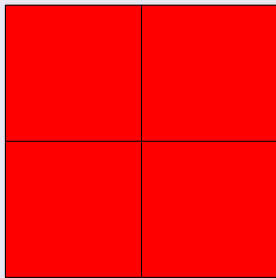
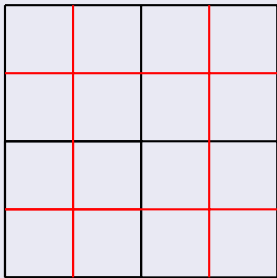


T^n 下集团的缠绕拓扑结构

一个集团可能由多个环组成

二维

二维情况下集团的结构一定是“田”型或 (p, q) 型



逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



高维?

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

特点

单环 $\vec{p} \in \mathbb{Z}^n$

可加性 $\vec{p}, \vec{q} \Rightarrow \vec{p} + \vec{q}$

可乘性 $\vec{p} \Rightarrow c\vec{p}$

结论

若存在 $\vec{p}^1, \vec{p}^2, \dots, \vec{p}^k$ 型环, 则能够构造出来 $\sum_{i=0}^k c_i \vec{p}^i$ 型环



大纲

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

1 逾渗模型

2 键分类

3 键分类后的几何性质

- 比例
- 最大集团

4 缠绕的拓扑结构

5 展望与致谢



利用稠化，进一步研究几何结构

程序已完成

逾渗模型

键分类

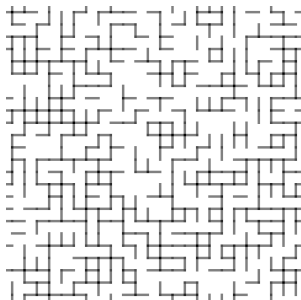
键分类后的几何性质

比例

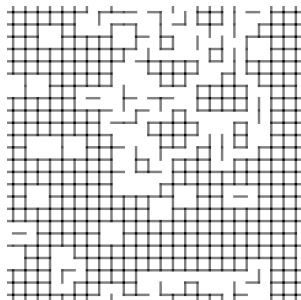
最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢



(a) 原始图



(b) 稠化后

图: $L = 24, p = 0.48$ 稠化前后的图像对比



其他

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

缠绕 缠绕的统计与分析

复杂度 严格证明回溯的平均复杂度是 $O(1)$ 的

进一步分析 这些数据的背后的原因



致谢

感谢答辩组的各位老师

逾渗模型

键分类

键分类后的几何性质

比例

最大集团

缠绕的拓扑结构

展望与致谢

导师

感谢邓友金教授的指导

合作

感谢黄伟师兄、章彦博师弟等的合作、讨论与帮助!